Компьютерные инструменты в образовании, 2015
№ 3: 26–31
УДК: 621.3
http://ipo.spb.ru/journal

ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ МАТЕМАТИКИ И ИНЖЕНЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Коточигов Александр Михайлович

Аннотация

Цель этой статьи — обсудить содержание математического образования студентов инженерных специальностей. Рассмотрен ряд примеров воздействия инженерных задач на развитие математического аппарата, которые показывают необходимость формирования у инженеров хорошей математической подготовки.

Ключевые слова: *базовые математические знания, инженерное моделирование.*

1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Риторический вопрос «зачем нужна математика?» останется актуальным всегда, поскольку, с одной стороны, спонтанные приложения случаются очень редко, а конкретные инженерные задачи с такой же частотой удается удовлетворительно перевести на математический язык.

Очерчивать границы того, какая математика потребуется будущему инженеру в его предполагаемой профессиональной деятельности, неправильно и невозможно. Это можно считать проявлением принципа неопределенности.

Учить (а не сообщать информацию) можно только на том уровне, на котором учащийся готов учиться. Готовность определяется результатами предшествующего обучения, а «сроки подготовки» целиком зависят от желания учиться. Сложные обратные связи приводят к тому, что стиль обучения математике меняется крайне медленно (локально это правильно, но на длительных периодах — нет).

Не считаться с изменениями в мире невозможно, а изменить привычке очень трудно. Обычно модификация курса сводится к тому, что к «обязательному» старому добавляется «необходимое» новое. Процесс этот не является прерогативой математики, то же происходит и с другими дисциплинами, кроме того, постоянно появляются и исчезают новые предметы. Все это приводит к пульсации объемов математических дисциплин с неизбежным трендом к их уменьшению. Вопрос о том, чем пожертвовать и что добавить, сложен и неоднозначен. Например, если заглянуть в учебники вековой давности, то виден большой объем изучения геометрических характеристик кривых и поверхностей в терминах производных. Сейчас этот материал, как правило, не входит в программу обучения. «В результате» пассажирам рельсового транспорта приходится испытывать на себе последствия неграмотности инженеров-путейцев, стыкующих рельса «на глазок», обеспечивая гладкость по наличию касательной (первой производной), не понимая, что центробежная сила определяется кривизной, и разрыв второй производной имеет своим следствием скачкообразное изменение центробежной силы [1].

Петербургские вузы ежегодно выпускают несколько тысяч инженеров. Из них не более десятка реально столкнутся с проблемой стыковки рельсов. Было бы крайне расточительным добиваться знания этих деталей от всех выпускников вузов. Задача обучения математике состоит в том, чтобы инженер был готов (не боялся) разобраться с той математикой, которая может ему потребоваться в рамках профессиональной деятельности. Ощущение такое, что здесь ничего не надо решать, жизнь сама расставит все по местам, но при этом необходимо наличие базы знаний. Вернемся к рельсовой тематике. В середине XIX-го века в России набирало силу строительство железных дорог. Замечательный математик А.А. Марков изучал вопрос об устройстве оптимальных путей для маневрирования поездов на железнодорожных станциях и получил ряд практически полезных результатов [2], однако, технический прогресс сделал эти работы не актуальными. Казалось бы, труд потрачен даром, однако через полвека эта работа послужила толчком для развития и осмысления абстрактных математических структур, предназначенных для решения задач выпуклой оптимизации [3]. Те же задачи оптимизации породили ситуацию противоположного типа, куда более нам известную. Другой, не менее крупный, математик Л.В. Канторович в конце 30-х годов 20-го века по прямому заказу мебельной фабрики решил задачу об оптимальном раскрое листов фанеры. По понятным причинам предложенные радикальные изменения «не прижились», но, по счастью, описание работы и алгоритм оптимизации были опубликованы [4]. Через десять лет на волне вычислительного бума, возникшего благодаря появлению компьютеров, американский математик Данцинг переоткрыл этот алгоритм. Задачи линейной оптимизации (так они называются в современной терминологии) оказались настолько востребованными, что в 1976 году Канторович получил Нобелевскую премию по экономике. Все это возвращает к банальной тираде «читайте классиков». Применительно к рассматриваемым здесь вопросам — учеба в вузе должна подготовить инженера к чтению классиков, причем готовность должна быть тем больше, чем больше у инженера прав принимать самостоятельные решения.

2. АКТУАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПРИЛОЖЕНИЙ МАТЕМАТИКИ — ТО, К ЧЕМУ НАДО ГОТОВИТЬ СТУДЕНТОВ

Рассмотрим несколько примеров, указывающих на направления, заслуживающие того, чтобы о них знали будущие инженеры.

1. *Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.*

Со времен Ньютона эти задачи прочно заняли центральное место в различного рода моделировании благодаря гарантиям явной разрешимости любого такого уравнения. После двухсот лет интенсивной эксплуатации таких моделей, стало ясно, что решение этих уравнений полностью определяется небольшим числом параметров. Правильное понимание этого явления требовало перехода к спектральному описанию рассматриваемых процессов. В конце 19-го века английский инженер Хевисайд предложил интуитивное описание такого перехода. Чистые математики критиковали этот метод за явную необоснованность. Оказалось, что для обоснования метода Хевисайда требуется принципиально новый аппарат — обобщенные функции, которые проникли в математику из квантовой механики, в рамках которой Дирак описал, какими должны быть эти понятия. К этому моменту в математике уже был разработан необходимый аппарат — теория меры Лебега, и на ее базе Л.В. Соболев сразу вслед за Дираком создал теорию обобщенных функций, позволяющую дать корректную математическую интерпретацию идей Хевисайда.

Это дало мощный толчок развитию этого метода. Хевисайд применял свой метод для моделей (преобразователей электрических сигналов) с конечным дискретным спектром, то есть с корнями многочленов. Новый математический аппарат позволил проводить предельные переходы в таких моделях. Здесь нашли применение формировавшиеся тогда идеи функционального анализа.

Многочлены в пределе превращались в аналитические функции, и необходимо было обеспечить конечность нормы предельной функции (конечность энергии, необходимой для реализации предельного перехода), а также разложить функцию на множители, позволяющие описать спектральные характеристики процесса. В итоге сформировалась исчерпывающая методика описания двухполюсников (точнее, описание передаточных функций). Эта теория ограничивалась двухполюсниками, так как для моделирования четырехполюсников надо работать с аналитическими вектор-функциями, передаточная функция становится при этом матрицей, состоящей из аналитических функций, которую надо разложить на множители. Здесь возникает масса проблем. Например, произведение матриц, в отличие от чисел, зависит от порядка сомножителей. Потребовалось 50 лет, чтобы усилиями многих математиков получить решение этой задачи. Практическое применение этого аппарата затруднено сложностями математического описания, но, надо думать, что все еще впереди. Совершено ясно, что эти конструкции имеют много общего с идеями параллельных вычислений [5, 6].

2. *Вычисление собственных чисел матриц*

Множество математических моделей основаны на том, что мы можем найти и разумно использовать собственные числа и собственные векторы матрицы. Этот мощный инструмент требует вычисления корней многочлена, степень которого равна порядку матрицы. До появления компьютеров это очень ограничивало применение этого аппарата. В середине прошлого века казалось, что эти проблемы исчезнут, однако очень быстро обнаружились трудности, которые невозможно преодолеть за счет скорости вычислений. Замечательную иллюстрацию этой проблемы нашел американский математик Уилкинсон. Рассмотрим многочлен $p(z) = (z-1)(z - 2)\ldots(z-20)$ Добавим к многочлену очень маленькое слагаемое $2^{-23}z^{19}$. Вычислим корни получившегося многочлена. Казалось бы, ничего не изменилось, но это предположение абсолютно неверно. Новый многочлен имеет 10 вещественных корней и 5 пар комплексно сопряженных корней, среди которых имеется корень вида $16,7 + i2,8$. Такой гигантский скачок противоречит интуиции, но легко убедиться, что он неизбежен. Достаточно рассмотреть соответствующее неявное уравнение и вычислить из него частную производную $\frac{\partial z}{\partial a_{19}}$, тогда в точке $z = 19$ мы получим $2 \cdot 10^9$. Обнаруженная неустойчивость алгоритма заставила искать другие подходы, и они были через несколько лет найдены экспериментальным путем в независимых исследованиях советского математика Кублановской и английского математика Френсисса [7]. Основанный на процедуре итераций алгоритм оказался чрезвычайно устойчивым и получил широкое распространение. Успех алгоритму обеспечило то обстоятельство, что процедура итераций обходила вычисление характеристического многочлена, а собственные числа, в отличие от корней многочленов, оказались устойчивыми к малым изменениям элементов матрицы.

Задача формирования у будущих инженеров понимания того, что вычислительный процесс может зависеть от колебаний параметров значительно сильнее, чем подсказывает интуиция, очень важна и должна обсуждаться именно в курсе базовой математики.

3. *Сплайны*

Можно только удивляться, что эти объекты, обладающие целым рядом простых свойств, делающих их удобными для отработки математических навыков, до сих пор стоят в стороне от математических структур, которые изучаются в вузовских курсах. Возможно, это обусловлено тем, что их активное использование в приложениях тоже связано с возможностями, открывшимися с появлением компьютеров. Слово сплайн (splice) в английском означает, в том числе, и гибкую линейку, издавна применявшуюся для вычерчивания красивых кривых там, где прямые и окружности не позволяли получать желаемую плавность контура. Такой чертеж невозможно точно воспроизвести, что неприемлемо для поточного производства. Этот недостаток был устранен заменой линейки на график многочлена, точнее, последовательности многочленов, гладко стыкованных между собой. Поскольку так построенные сплайны являются решениями некоторой «краевой» задачи с краевыми условиями, то они оказываются решениями некоторых экстремальных задач. Все это дает массу учебного материала для формирования стандартных математических навыков. Но истинная ценность этих понятий проявилась при попытках использовать их для построения базисов, удобных для решения задач фильтрации сигналов и распознавания образов. Задача построения базиса, трудная сама по себе, становится очень трудной, когда требуется доказать приемлемость базиса для практической работы (обычно это гарантии сходства с ортогональным базисом). Это уже серьезные задачи, для решения которых требуется аккуратная работа с преобразованием Фурье и, далее, с возникающими при этом аналитическими функциями. Не имея базовых представлений о сплайнах, инженер не сможет правильно выбирать базис, соответствующий решаемой задаче. При наличии мощного программного обеспечения применение его «наудачу» может иметь печальные последствия. Современные студенты хорошо «подготовлены» к такому способу действий, они не могут отличить в потоке электронной информации теорему о существовании корня у многочлена от теоремы о существовании корня у непрерывной функции, меняющей знак.

4. *Базисы Гребнера (теорема Гильберта, алгебраическая геометрия)*

Упоминавшаяся выше теорема о существовании корня у многочлена (от одной переменной) делает свойства и приложения таких многочленов достаточно простыми и прозрачными. Но для многочленов от нескольких переменных все намного сложнее. Многочлен $x + y$ обращается в нуль в начале координат, но не делится ни на x, ни на y. В начале XX-го века Гильберт дал полное теоретическое описание этого вопроса, которое опиралось на математические структуры, весьма далекие от тех, которыми оперируют инженеры [8]. Казалось, что этот результат не имеет практической ценности, но через 50 лет Гребнер [9] выдвинул идею построения специальных базисов, получивших впоследствии его имя. Эти базисы позволяли, если не решить, то, по крайней мере, сильно продвинуться в численном решении систем алгебраических уравнений. Ученик Гребнера Бухбергер [10] разработал алгоритмы решения таких задач, реализованные в математических пакетах высокого уровня. Практическая ценность такого программного обеспечения очевидна. В популярных сейчас задачах навигации постоянно приходится решать задачу о восстановлении координат по расстояниям от нескольких точек привязки, это типичная система алгебраических уравнений. Встречаясь с попытками практически использовать это программное обеспечение, часто замечаешь, что автор относится к методу решения как к «очень черному ящику» и использует его либо неэффективно, либо неправильно. Наша задача на простых примерах пояснить работу таких алгоритмов, с тем чтобы в дальнейшем инженер мог осмысленно применять такое программное обеспечение.

3. О БЕСПОЛЕЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ

Развитие компьютеров стимулировало появление «спортивной математики», то есть вычислений, направленных на поиск больших простых чисел или очередного знака числа π. Трудно найти практическую пользу от такой работы, но случается и такое. В одном из таких вычислений авторы заметили систематическую ошибку в счете, которая, как они убедились, не была связана с ошибками в алгоритме. Они обратились с этим в фирму Intel — разработчик процессора. Там были приняты продолжительные и дорогостоящие усилия для выяснения причин сбоя. В итоге была найдена ошибка в конструкции процессора, и справедливость восторжествовала.

Пример противоположной направленности рассказан мне математиком из Стенфордского университета. Математики давно изучали вопрос о числе целых точек на алгебраической кривой, то есть числе целочисленных решений уравнения $P(x,y) = 0$ для произвольного многочлена от двух переменных. Для многочленов невысоких степеней были найдены формулы, дающие полное описание решений, и существовало общепринятое мнение, что для более высоких степеней такого простого описания нет. В конце XX века физикам-теоретикам понадобилось решение такой задачи, причем для многочленов высоких степеней. Из физических соображений они нашли нужные им формулы. Разумеется, никакого математического доказательства эти формулы не имели. Математики — специалисты в этой области — не поверили физикам и, пытаясь их опровергнуть, написали программу, которая перебором вычисляла число решений для конкретной алгебраической кривой. Результаты формулы и программы разошлись. Через некоторое время у авторов программы появилось желание еще раз проверить программу. При этом была найдена ошибка, а после ее исправления результаты физиков и математиков совпали. Получив такой мощный стимул, математики предприняли усилия и через некоторое время доказали полученные физиками формулы.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Невозможно обучить студентов всему новому, что в перспективе может пригодиться им в работе, более того, невозможно предугадать направление их интересов. Главное — создание прочной базы знаний и обоюдное стремление к формированию понимания того, в каких задачах может оказаться полезным тот или иной математический аппарат.

Список литературы

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974.
2. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах. Харьков, 1889.
3. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
4. *Канторович Л.В.* Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд. ЛГУ, 1939.
5. *Анго А.* Математика для электро и радиоинженеров. М.: Наука, 1965.
6. *Hteton W.* Operator Theory, Analytic Functions, Matrices and Electrical Engineering, Providence, 1985.

7. *Икрамов Х.Д.* Несимметричная проблема собственных значений. М.: Наука, 1991.
8. *Аржанцев И.В.* Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. МЦНМО, 2003.
9. *Grebner W.* Modern Algebaische Geometrie. Springer-Verlag, 1949.
10. *Buchberger. B.* PhD Thesis 1965 // Journal of Symbolic Computation, 2006. № 41. P. 475–511.

MUTUAL INFLUENCE OF MATHEMATICS AND ENGINEERING MODELING

Kotochigov A. M.

Abstract

The aim of this article is to discuss a content of mathematical education of engineers.

We consider numbers of examples of influence of engineering problems on development of mathematical apparat. That show that main thing is creating of sound base of mathematical knowledge.

Keywords: *base of mathematical knowledge, engineering modeling.*

Коточигов Александр Михайлович,
доктор физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой высшей
математики №2 СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,
amkotochigov@gmail.com